Norbert Harthun; Ines Rennert

Mitkopplung in nichtlinearen Systemen - die Chance für das „Deterministische Chaos“

1 Einführung

Seit ungefähr zwanzig Jahren macht das Wort „Chaos“ in der Wissenschaft auf eigentlich allen Gebieten als schillernder Begriff die Runde (in neuerer Zeit hat man in diesem Zusammenhang auch den Begriff „Komplexitätsforschung“ eingeführt). Fast jedem dürfte der Ausdruck „Chaos“ in irgendeinem Medium schon begegnet sein. Hörfunk, Fernsehen und Printmedien aller Art widmeten sich der „Chaos-Thematik“ mit unterschiedlichstem Umfang und Niveau. Was einem ungefähr im Gedächtnis blieb, war der Eindruck, dass es sich um etwas sehr Wichtiges handelte und dass es ziemlich kompliziert sei. Die Verwirrung begann schon damit, dass man eigentlich das „Chaos“ schon lange kannte, sei es als Zustand des Kinderzimmers nach einigen Minuten, als Bewegung eines idealen Gases oder das, was als Meldung aus der Tageszeitung übrig blieb, wenn der junge Hund mit ihr gespielt hatte. Die Wissenschaftler hatten eine Zusatzbezeichnung (deterministisches) eingeführt, die aber ein ganz anderes „Chaos“ definierte, als damit in der Umgangssprache gemeint ist, eine Tatsache, welche oft von den Medien übersehen wurde. „Determiniert“, aus dem Lateinischen stammend, meint: Festgelegt, bestimmt. Und damit ist eine im Alltag doch mehr oder weniger unbekannte Art von „Chaos“ gemeint, die nichts mit den oben erwähnten Beispielen zu tun hat, nämlich nicht die totale Unordnung sondern eine nur scheinbare Regellosigkeit, die nur oberflächlich wie ein Zufallsmuster aussieht. Bei genauerem „Hinsehen“ werden feste Gesetzmäßigkeiten erkennbar.

Nun kann man sich fragen, warum zu den unzähligen Veröffentlichungen über das deterministische Chaos noch eine an dieser Stelle hinzu kommt. Dafür gibt es vier Gründe:

- Viele Wissenschaftler glauben, dass die Chaos-Theorie sich als ebenso wichtig erweisen wird wie die Quantenmechanik und die Relativitätstheorie.

- Der zweite Grund ist die Tatsache, dass sich inzwischen die wenigen Grundlagen herausgeschält haben, die für ein Übersichtsverständnis ausreichend sind, und

- der dritte, dass hinter dem deterministischen Chaos ein Spezialfall des universellen Rückkopplungsprinzips steckt, nämlich die posive Rückkopplung oder Mitkopplung.

- Viertens hat sich durch die Chaos-Theorie das Wissen um die Nichtlinearität der meisten Systeme in Natur, Technik und Gesellschaft schon weit verbreitet.

Ganz pauschal ausgedrückt heißt „Rückkopplung“, dass das Ausgangssignal eines Systems wieder auf dessen Eingang zurückgeführt wird und dadurch alle Eigenschaften des neuen geschlossenen Systems im Vergleich zum ursprünglichen offenen System geändert werden können.

Ohne „Nichtlinearität“ kommt es nicht zum deterministischen Chaos. Werden entsprechende Systemzusammenhänge grafisch beschrieben, dann zeigen sich nichtlineare Kennlinien. Liegt ein nichtlineares System nur in Formeln beschrieben vor, so muss dort zum Beispiel eine Variable im Quadrat auftauchen.

Rückkopplungen (genauer: Mitkopplungen) – sie werden unten erklärt - können in nichtlinearen Systemen für unvorhersagbare Überraschungen sorgen und in dieser Einführung soll versucht werden, den Sachverhalt soweit zu erhellen, dass man ein Gefühl für die Tragweite der neuen Erkenntnisse bekommt und die Grundlagen versteht.

Die Fachliteratur geht an diese Aufgabe aus mathematischer oder physikalischer Sicht heran, ist leider oft wenig anschaulich und es kann in der Fachliteratur über Chaos sogar passieren, dass der Begriff „Rückkopplung“ überhaupt nicht auftaucht, obwohl es ohne die Rückkopplung (genauer: Mitkopplung) kein Chaos geben kann. (Auf den Zusatz „deterministisch“ sei, der Kürze wegen, von jetzt an verzichtet).

Wer die Chaosliteratur studiert, wird schnell auf einen weiteren Begriff stoßen, der dort meistens vorausgesetzt und daher nicht erklärt wird: „Dynamische Systeme“. Damit sind Systeme gemeint, in denen Größen vorkommen, die zeitvariabel sind, also von der Zeit abhängen. In der Elektronik wären das z.B. Signale im Zusammenhang mit Systemen, die Speicher (Induktivitäten, Kapazitäten) enthalten.

2 Rückkopplungsarten

2.1 Allgemeine Übersicht

Möglicherweise ist der Begriff der „Rückkopplung“ mit seinen beiden Teilaspekten nicht jedem sofort geläufig; deshalb soll hier kurz das Wesentliche beleuchtet werden: Das allgemeine Schema eines Rückkoppelsystems zeigt Bild 1. Dort wirkt der Ausgang auf den Eingang zurück. Hier gilt: A bewirkt B und B wirkt (zurück) auf A. Man spricht in diesem Fall von einer „zirkulären“ oder „Kreis-Verknüpfung“, um die geschlossene Schleife zu betonen. Das Verhalten des geschlossenen Systems kann völlig anders sein, als das Verhalten des offenen Systems „Vorgang“. Es sei ein Vergleich gestattet: Wenn jeder Mensch sofort die Ergebnisse seiner Vorgehensweisen erfahren würde, gäbe es sicher sehr überraschte und oft sehr veränderte Menschen...

Durch die geschlossene Schleife ist Ursache und Wirkung („Henne oder Ei“) nicht mehr einzeln erkennbar (was war zuerst da, A oder B ?), es sei denn, die Entstehungsgeschichte des Systems ist bekannt. Nun gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten der Rückkopplung vom Ausgang auf den Eingang, nämlich mit abschwächender oder bestärkender Wirkung, negativer oder positiver Rückkopplung (Gegen- bzw. Mitkopplung).

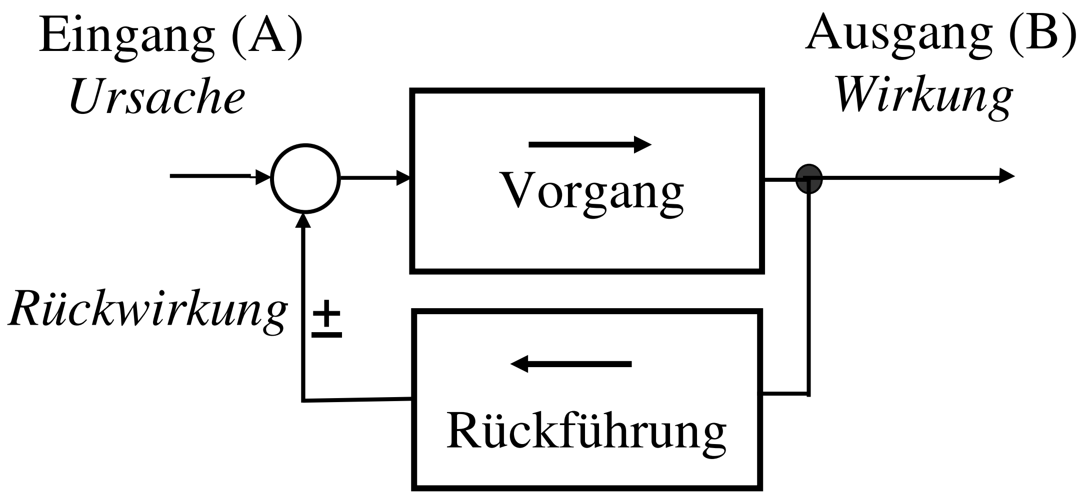


Bild 1 Allgemeingültiges Blockdiagramm eines Rückkoppelsystems

2.2 Negative Rückkopplung (Gegenkopplung)

Ein fahrendes Auto hat den Luftwiderstand zu überwinden (Bild 2). Wird Gas gegeben, so erhöht sich das Tempo und damit auch der Luftwiderstand. Mit Luftwiderstand ist der Anstieg der Geschwindigkeit aber geringer als ohne. Es wird also die Wirkung des „Gas Gebens" geschwächt. (Gegenkopplung). Nun kann sehr viel Gas gegeben werden, um die Geschwindigkeit trotzdem zu steigern (Treibstoffverbrauch!), aber der Luftwiderstand steigt immer stärker (quadratisch!). Da-durch wird schließlich eine Grenze erreicht, es kann je nach Leistungsfähigkeit des Antriebs nur eine gewisse Höchstgeschwindigkeit erreicht werden und es besteht keine Gefahr des „Durch-gehens" des Fahrzeugs (stabilisierende Wirkung).

Gegenkopplung: Die Rückführung vom Ausgang zum Eingang des Vorwärtsgliedes schwächt den Einfluss des Eingangssignals.

Am Beispiel des Kraftfahrzeugs lässt sich die Gegenkopplung und ihre stabilisierende Wirkung gut veranschaulichen. Gegenkopplungen sind bei vielen Systemen zur Stabilitätserhöhung gegen jede Art von Schwankungen erforderlich. Mit Schwankungen sind auch Abweichungen der Werte aufgrund von Kennlinien-Nichtlinearitäten gemeint. Eine Gegenkopplung hat also eine Linearisierung von Kennlinien zur Folge und wird schon deswegen wenig mit chaotischem Systemverhalten zu tun haben, da derartige Systeme nichtlineare Kennlinien zur Voraussetzung haben.

Gegenkopplung bewirkt eine Linearisierung von Kennlinien

Heutige technische Systeme haben meistens Gegenkopplungscharakter! Es seien zwei bekannte Ausnahmen genannt, die zur Mitkopplung gehören: Das Staustrahl-Triebwerk (früher V1; später in den 80-er Jahren für Raumgleiter geplant), bei dem der Schub mit der Geschwindigkeit steigt (der Treibstoffverbrauch allerdings auch!) und der Kernspaltungsreaktor (Kettenreaktion, die spätestens 1986 durch die Tragödie von Tschernobyl weltweit bekannt wurde).

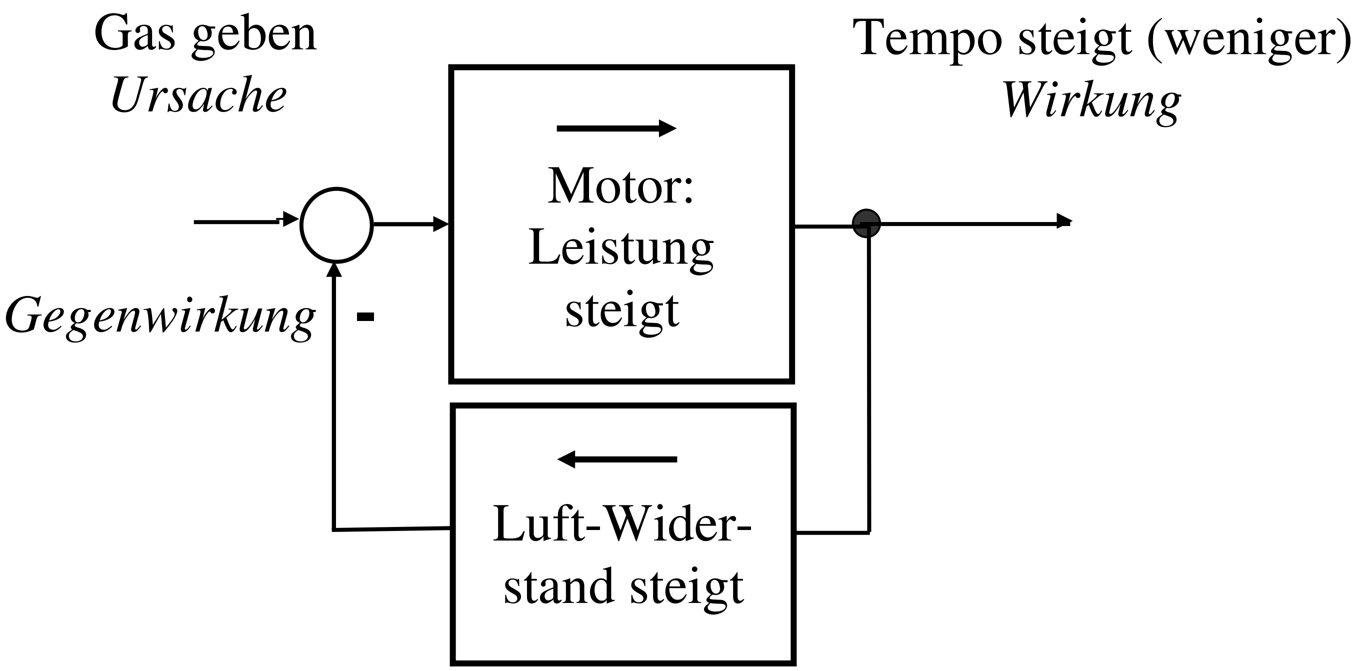


Bild 2 Ein fahrendes Kraftfahrzeug muss den Luftwiderstand überwinden.
Dieser wirkt dem „Gas Geben“ entgegen.

2.2 Positive Rückkopplung (Mitkopplung)

Als Beispiel wurde ein zinsbringendes Sparkonto gewählt, auf das Geld eingezahlt wurde und auf dem sich das Guthaben „vermehrt“ (Bild 3). Bei wertfreier Betrachtung eine schöne Sache. Es wurde einmal eingezahlt und am Ende jeden Jahres werden die Zinsen gutgeschrieben, was einer neuen Einzahlung entspricht. Die „Rückführung“ hat also unterstützende Wirkung: Das Guthaben steigt.

Mitkopplung: Die Rückführung vom Ausgang zum Eingang des Vorwärtsgliedes unterstützt den Einfluss des Eingangssignals.

Am nächsten Jahresende bringen die Zinsen mehr Geld auf das bereits durch die vergangenen Zinsen erhöhte Guthaben (Zinseszins) usw.. Das bedeutet grundsätzlich ein ohne Grenzen steigendes Guthaben (labilisierende Wirkung)! Diese System-Regel hat übrigens ungeheure gesellschaftliche Auswirkungen; das gehört hier jedoch nicht zum Grundlagen-Thema.

Mit „labilisierender Wirkung“ ist gemeint, dass jede Art von Schwankung verstärkt wird, das heißt auch, dass vorhandene Linearitätsabweichungen von Kennlinien eines Systems stärker zur Wirkung kommen als ohne Mitkopplung. Hier kann schon geahnt werden, dass

Mitkopplung und Chaos zusammengehören. Manchmal ist sie in der „Chaos-Literatur“ mit „Selbstverstärkung“ oder „selbstverstärkende Rückkopplung“ umschrieben[1].

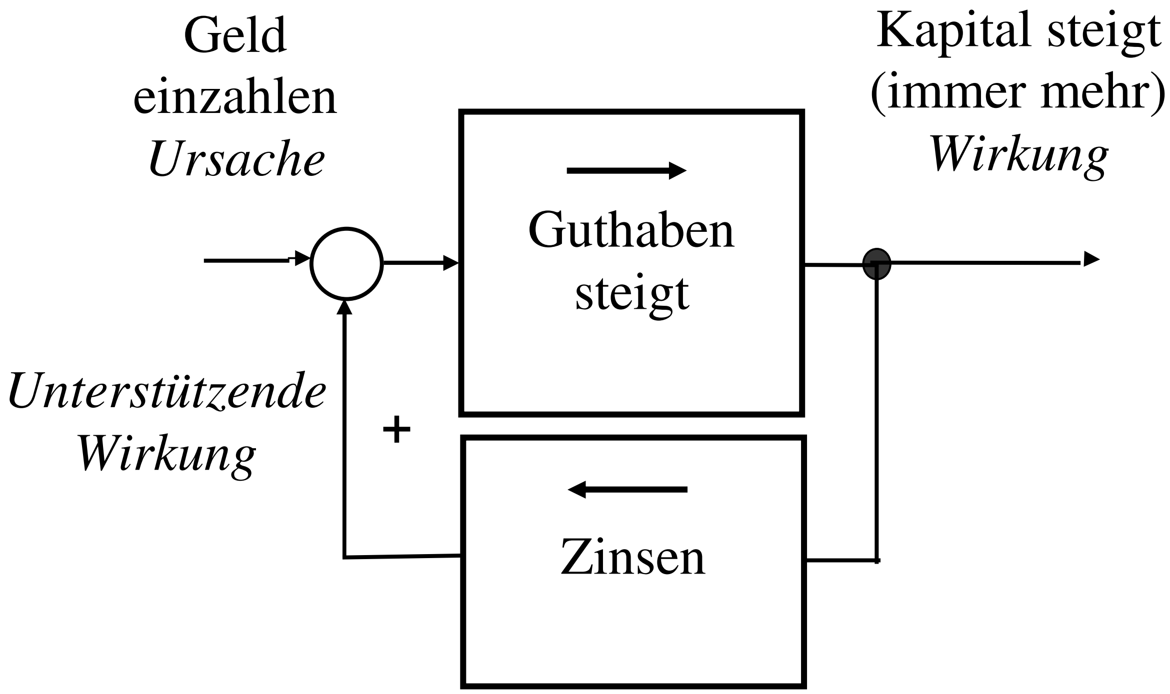


Bild 3 Wundersame Geldvermehrung auf dem Sparkonto (Mitkopplung)

3 Rückkopplung in der Mathematik: „Rekursion“

Nun soll gezeigt werden, wie man in der interdisziplinären Sprache der Mathematik einfache Grundlagen der Chaos-Theorie beschreiben kann; über Parabelgleichungen braucht man dabei nicht hinaus zu gehen. Mit Hilfe der „logistischen Gleichung“ von Verhulst [2], sollen nun die Einzelheiten eines Systems untersucht werden, das durchaus ins „Chaos stürzen“ kann.

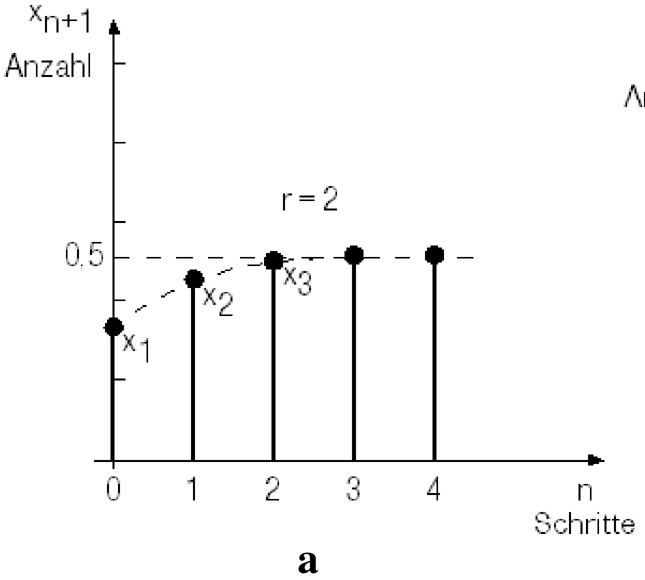
In diesem Kapitel wird in die „Chaos-Mathematik“ so einfach wie irgend möglich, aber doch korrekt eingeführt. Es werden numerische Beispiele diskutiert, begleitet von vielen Bildern. Hier ist, wenn auch nur kurz, konzentriertes Lesen des Textes mit jeweiligem Rückgriff auf die Bilder erforderlich.

Man stelle sich ein Kaninchenvolk vor (auf eingezäuntem Areal), welches in jedem Jahr genügend Futter bekommt. Normalerweise wird die Zahl zunehmen (Bild 4a). Linear gedacht könnte man meinen: Je mehr Futter desto mehr Tiere. In der Natur ist dies aber aus vielen Gründen nicht beliebig steigerbar. So kann es sein, dass trotz starker Erhöhung der Futtermenge die Zahl sinkt, weil z.B. die zu fetten Tiere ihren Feinden nicht mehr entwischen können. Oder noch schlimmer: Krankheiten aufgrund erhöhter Bevölkerungsdichte raffen sehr viele Tiere dahin. Bei dem vielen Futter wachsen dann aber wieder zahlreiche Tiere heran, von

---

[1] Im Vorläufer-Aufsatz: „Norbert Harthun; Ines Rennert: Deterministisches Chaos und Rückkopplung – zwei Seiten einer Medaille; Unterrichtsblätter d. Deutschen Telekom AG; Jg. 55; 11/2002, S. 558-569“ folgt auf diesen Absatz der schaltungsbetonte Text, der hier am Schluss (siehe dort) als Anhang beigefügt wurde.

denen etliche anschließend doch wieder durch „Dichtestress“ zugrunde gehen usw. Im Falle übermäßiger Nahrungsmenge können die Zahlen von Generation zu Generation also sehr stark schwanken und der zeitliche Verlauf sieht entsprechend chaotisch aus (Bild 4b). In den Bildern sind auf der waagerechten Achse die Generationen (Zeitschritte n) dargestellt und auf der senkrechten die normierte Zahl der Tiere (1 entspricht 1000 Tieren). Mit den folgenden anschaulichen Rechnungen wird gezeigt, wie diese Bevölkerungsentwicklungen möglich sind.



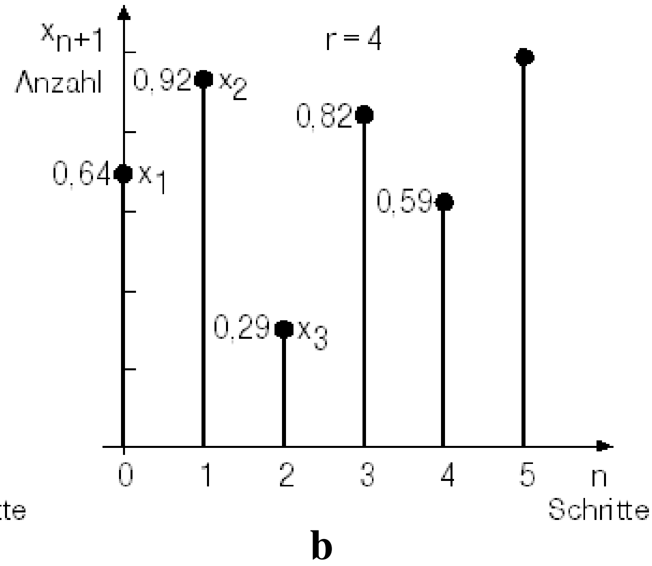


Bild 4 Entwicklung einer Kaninchenpopulation
a) reguläres Wachstum bei normaler Futtermenge (r = 2)
b) chaotisches Verhalten bei übermäßiger Futtermenge (r = 4)

Das Besondere an diesem historischen Beispiel ist, dass sich nach Verhulst [1] das jeweilige Verhalten der Population (Bevölkerung) mit folgender einfacher Formel beschreiben lässt (er hat sie aus der oben erwähnten logistischen Gleichung, einer Differentialgleichung für Populationen, hergeleitet)

$$x_{n+1} = r\left(x_n - x_n^2\right) \qquad (1a)$$

x = normierte Zahl der Kaninchen
n = Zahl der Generationen (Schritte)
r = normierte Nahrungsmenge

Dabei handelt es ich um eine quadratische Gleichung (Parabel), also um einen **nichtlinearen Zusammenhang** in rekursiver Form. Rekursion heißt Rücklauf, Rückführung und man wird zu Recht sofort an „Rückkopplung“ erinnert. (Der Index „n+1“ gibt an, dass es sich bei x_{n+1} um einen Rechenschritt mehr handelt als bei x_n, er informiert über die Rechenschritte).

Rekursion entspricht Rücklauf, Rückführung, Rückkopplung

Die Rückkopplung geschieht in der mathematischen Schicht also dadurch, dass schrittweise das jeweilige Ergebnis der Rechnung wieder neu in die Formel eingesetzt und mit diesem Wert weiter gerechnet wird, ein bei den modernen Systemen übliches Verfahren der digitalen Signal-verarbeitung (Rechner). Um dies anschaulich darzustellen, kann man Gleichung (1a) etwas ergänzen:

Startwert x_0

$$x_{n+1} = r(x_n - x_n^2) \qquad (1b)$$

Die anfangs vorhandene (normierte) Kaninchenzahl x_0 gibt man zuerst ein, sie sei 0,20 (also 200 Tiere). Für normale Nahrungsmengen hat r einen Wert zwischen 1 und 3; für das erste Beispiel wird der mittlere Wert r = 2 gewählt. Mit Gleichung (1) ergibt sich dann (mit r = 2 und x_0 = 0,2) als Ergebnis des ersten Schrittes (n = 1):

$$x_1 = 2(x_0 - x_0^2) \quad \textit{Werte eingesetzt}:$$
$$x_1 = 2(0{,}2 - 0{,}2^2) = 2(0{,}2 - 0{,}04) = 0{,}32$$

r = 2

n	x_n
0	$x_0 = 0{,}2$
1	$x_1 = 2\ (0{,}2 - 0{,}2^2) = 0{,}32$
2	$x_2 = 2\ (0{,}32 - 0{,}32^2) = 0{,}44$
3	$x_3 = 2\ (0{,}44 - 0{,}44^2) = 0{,}49$
4	$x_4 = 2\ (0{,}49 - 0{,}49^2) = 0{,}50$
5	$x_5 = 2\ (0{,}5 - 0{,}5^2) = 0{,}50$

Tabelle 1 Wachstum bei normaler Futtermenge

In Tabelle 1 sind alle sinnvollen weiteren Schritte aufgeführt. Man erkennt, dass sich die Anzahl schon ab n = 4 auf den Wert 0,5 (500 Tiere) einstellt und sich nicht mehr verändert. (Nach jeder Zeile wurde das Ergebnis im Taschenrechner gelöscht und auch nur zweistellig wieder eingegeben, da auch der Anfangswert nur zweistellig ist)

Dies wäre sozusagen der Idealfall für ein begrenztes Gebiet: die Zahl der Kaninchen wächst und bleibt anschließend konstant. In der Tabelle wurden die Rechenschritte zwar übersichtlich dargestellt, anschaulicher aber ist eine Grafik. Hierzu sei zunächst zu Gleichung 1a zurückgekehrt und auf die rekursive Schreibweise bzw. auf dieses Verfahren verzichtet, also ohne Rekursion gearbeitet. Dann wird x_{n+1} durch das aus der Schule bekannte y ersetzt:

$$y = r(x - x^2) \qquad (2)$$

Die grafische Darstellung einer derartigen Funktion kann bekanntlich mit Hilfe einer Wertetabelle geschehen, indem man sich feste x-Werte vorgibt und die jeweils zugehörigen y-Werte berechnet. Dies ist in Tabelle 2 geschehen, schlicht „geradeaus“ berechnet, ohne Rekursion! Die Werte für x wurden, beginnend mit Null, um jeweils 0,2 erhöht und darunter die berechneten y-Werte notiert. Der Wert für r ist auch wieder zwei, um vergleichbare Verhältnisse zu schaffen:

x	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1
y	0	0,32	0,48	0,5	0,48	0,32	0

Tabelle 2 Wertetabelle ohne Rekursion

Wie schon der Exponent zwei erwarten ließ, ergibt sich eine Parabel, die in Bild 5a dargestellt wurde. Auf der Kurve sind die Wertepaare der Tabelle 2 als Punkte angedeutet. Diese Kurve wurde ohne Rekursion gewonnen. (In Gleichung 1 wurde „x_{n+1}" lediglich durch „y" ersetzt, also in Anlehnung an die Schulkenntnisse die Schreibweise geändert (Gleichung 2) und die Parabelwerte errechnet).

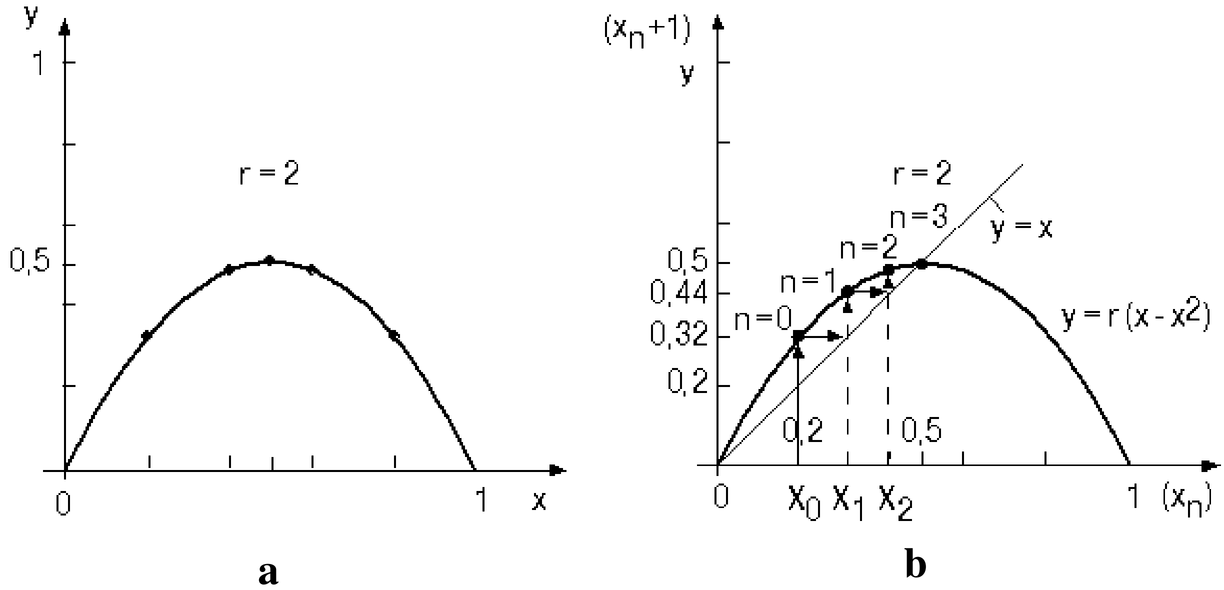


Bild 5 Veranschaulichung der Gleichungen (2) und (1b)

a) Parabel ohne Rekursion; Gl. (2)

b) Parabel mit Rekursion; Gl. (1b)

Als nächster Schritt soll die Rekursion wieder ins Spiel kommen: In Gleichung 1a ist durch die Pfeile angedeutet, dass nach einem Startwert x_0 der jeweilig berechnete Wert „x_{n+1}" von der linken wieder als neuer Ausgangswert x in die Klammern auf der rechten Seite einzusetzen ist. „x_{n+1}" entspricht aber dem y. Mit anderen Worten, bei der Rekursion wird y gleich x gesetzt:

$y = x$ (3)

Damit sieht die Wertetabelle für dieselbe Kurve ganz anders aus (Tabelle 3); alle Punkte sind wieder Parabelpunkte, liegen aber nur auf der ersten Hälfte (Bild 5b):

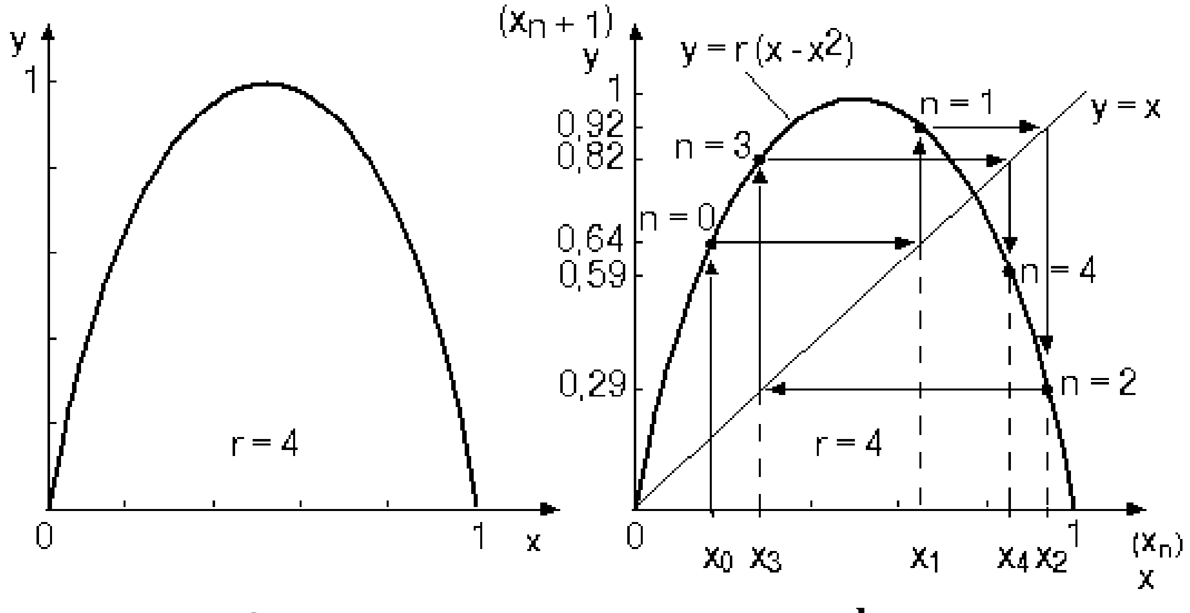
x	0,20	0,32	0,44	0,49	0,50
y	0,32	0,44	0,49	0,50	0,50

Tabelle 3   Wertetabelle mit Rekursion

Die Pfeile in Tabelle 4 deuten die jeweilige Gleichsetzung von y und x (bzw. x_{n+1} und x_n) an. Die Werte wurden bereits in Tabelle 2 berechnet, wie man leicht vergleichen kann. Nun soll Gleichung 3 etwas genauer beleuchtet werden: Es handelt sich bei ihr um die Gleichung einer Geraden mit der Steigung 1 (Bild 5b). Das bedeutet, dass sie im Falle der Rekursion eine Hilfe in der Grafik darstellt, um die rekursive Abfolge der Werte auf der Kurve anschaulich zu machen.

In Bild 5b ist zu erkennen, wie zu dem Wert $x_0 = 0{,}2$ der Wert $y_1 = 0{,}32$ gehört (Schritt 1 in Tabelle 1). Von diesem Parabelpunkt P(0,2; 0,32) wird eine waagerechte Hilfslinie bis zur Geraden y = x gezogen. Senkrecht unter ihrem Schnittpunkt mit dieser Geraden liegt der neue x–Wert (x_1). Wegen der Geradensteigung 1 beträgt er auch 0,32 (= y_1). Eine senkrechte Hilfslinie mit dem neuen x-Wert ergibt den neuen Parabelpunkt P(0,32; 0,44). Von hier aus wird wieder eine waagerechte Hilfslinie bis zur Geraden y = x gezogen usw...Die Werte bewegen sich auf den Fixpunkt 0,5 zu; von Chaos ist nichts zu merken (siehe auch Bild 4a).

Ganz anders werden die Verhältnisse, wenn r = 4 gesetzt wird, was einer übermäßigen Futtermenge entspricht (Bild 4b)! Mit diesem Wert ergibt sich nach Gleichung 1 (bzw. 2) eine andere Parabel, deren Scheitelpunkt wesentlich höher liegt (Bild 6a). Die Lage der 45°-Geraden (Steigung 1) bleibt aber gleich (Gleichung 3).



<u>Bild 6</u> Veranschaulichung der Gleichungen (2) und (1b) bei übermäßiger Futtermenge
a) Parabel ohne Rekursion; Gl. (2)
b) Parabel mit Rekursion; Gl. (1b)

Wieder wurde mit dem Startwert $x_0 = 0{,}2$ begonnen und die sich ergebende Punktfolge mit den zugehörigen Schritten (n) eingezeichnet (Bild 6b). Das Verfahren mit den Hilfslinien zusammen mit der Geraden y = x ist ebenfalls angedeutet. Die Punkte sind ungeordnet verteilt (<u>chaotisch</u>!), liegen aber alle auf einer Parabel (<u>determiniert</u>!). Zur Kontrolle wurde auch noch die zugehörige Iterationstabelle Tabelle 4 (analog zu Tabelle 1) angeführt.

r = 4

n	x_n
0	$x_0 = 0{,}2000$
1	$x_1 = 4\ (0{,}2000\text{-}0{,}2000^2)\ =\ 0{,}6400$
2	$x_2 = 4\ (0{,}6400\text{-}0{,}6400^2)\ =\ 0{,}9216$
3	$x_3 = 4\ (0{,}9216\text{-}0{,}9216^2)\ =\ 0{,}2890$
4	$x_4 = 4\ (0{,}2890\text{-}0{,}2890^2)\ =\ 0{,}8219$
5	$x_5 = 4\ (0{,}8219\text{-}0{,}8219^2)\ =\ 0{,}5855$
usw.	

Tabelle 4 Wachstum bei übermäßiger Futtermenge

Aus Gründen der Deutlichkeit wurden die beiden Extreme reguläres (auch „laminares“) und chaotisches Verhalten zuerst besprochen und einander gegenübergestellt. Die abstrakte Gleichung 1 beschreibt ursprünglich, wie erwähnt, das Wachstum einer Kaninchenpopulation. Nachdem sie einmal gefunden wurde, ist es möglich, alle möglichen Fälle durch Variation von r zu simulieren. Sie wurde stellvertretend für inzwischen unzählige andere Systembeschreibungen für diese Einführung gewählt und soll auch noch weiter der Führer in die Chaos-Theorie sein. Die Bilder 5b und 6b zeigen zwar die reguläre und die chaotische Punktfolge auf der Parabel recht anschaulich, gebräuchlicher sind aber Darstellungen mit der Zeit t (bzw. Schrittfolge n) als waagerechter Achse (Bild 4). In diesem Sinne gehören Bild 4a und Bild 5b sowie Bild 4b und Bild 6b jeweils zusammen.

Diese Bilder enthalten nur wenige Punkte, stellen also wenig Schritte (n) dar, weil es hauptsächlich darum ging, die einzelnen Berechnungen leicht nachvollziehbar bzw. transparent zu machen. Gleichzeitig machen sie schon deutlich, dass hinter einem total chaotisch erscheinendem Zeitverlauf eine exakte, genau festgelegte Gesetzmäßigkeit stehen kann – in diesem Falle Gleichung 1. Daher rührt der Name „Deterministisches Chaos“.

4 Feigenbaum–Szenario und Attraktoren

Doch zurück zur Gleichung 1. Der Wert für „r“ wurde in den besprochenen Beispielen willkürlich und sprunghaft von 2 auf 4 geändert. Dieser „Kontrollparameter“, wie er allgemein genannt wird, ist offensichtlich maßgebend für den Übergang ins Chaos. Daher wurde eine Grafik eingeführt, die ihn als unabhängige Variable an die waagerechte Achse setzt. Senkrecht werden alle Werte eingetragen, die sich beim jeweiligen r aus den Iterationen ergeben. Das entstehende Diagramm wird „Feigenbaum Szenario“ genannt (Bild 7) [1].

Es wird in der Literatur meistens der hauptsächlich interessierende Ausschnitt von r = 2,8 ....4 gezeigt. Außerdem wird verschwiegen, dass die Ergebnisse der ersten 30 Schritte (von mehreren Tausend) in der Grafik nicht gezeigt werden, da ihre Werte stark von der Kurve abweichen. Die ersten 30 Schritte sind hier ebenfalls nicht dargestellt, aber es ist der ganze Bereich von r = 0 bis r = 4 abgebildet. Bis $r_1 = 3$ erkennt man eine ansteigende Kurve (auch

Attraktor genannt), die für jedes r die Populationszahl angibt, die sich aus Gleichung 1 nach einer gewissen Mindestanzahl von Iterationsschritten ergibt. Man erkennt bei r_1 eine Verzweigung, Gabelung („Bifurkation“) der Kurve, wo bei jedem Kontrollfaktor r jeweils zwei Populationszahlen auftreten. Das heißt,

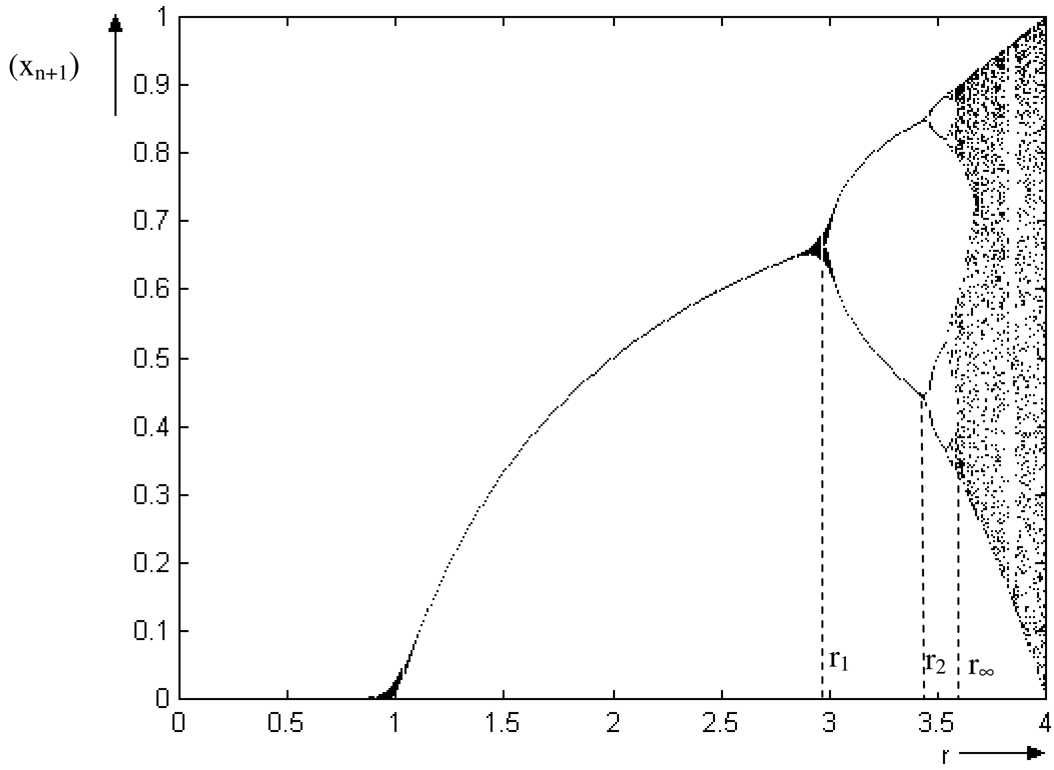


Bild 7 Feigenbaum-Szenario

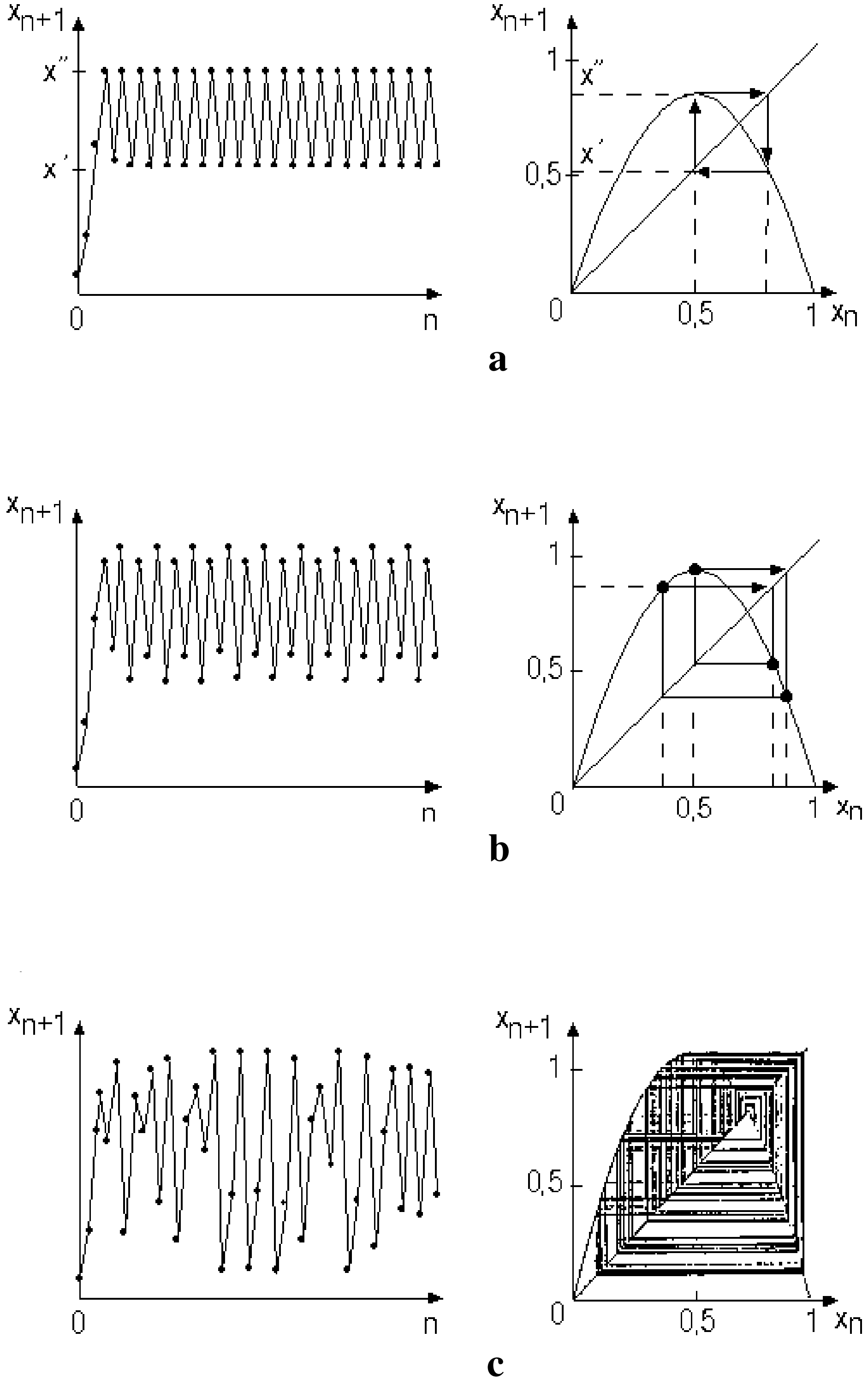
bei einem Schritt (n) tritt z.B. die obere Anzahl, beim nächsten (n+1) die untere Zahl auf: Es treten „Schwingungen“ auf (Bild 8a); die Kaninchenzahlen schwanken zwischen zwei geordneten Zahlenfolgen, man spricht von „Periodenverdopplung“. Bei r_2 verzweigen sich die beiden Kurvenäste ein weiteres Mal („Periodenvervierfachung“ Bild 8b) usw. bis schließlich der Chaos-Bereich beginnt, gekennzeichnet durch r_∞ (Bild 8c). (In den Bildern 8a bis c wurden im Gegensatz zu Bild 4 nicht mehr die Werte senkrecht mit Endpunkten eingetragen, sondern nur die Punkte miteinander verbunden). Bei der Gleichung (1) nach Verhulst gelten folgende Bereiche:

$1 < r < 2{,}9934$	regulär
$2{,}9934 < r < 3{,}4495$	Periodenverdopplung
$3{,}4495 < r < 3{,}5441$	Periodenvervierfachung
$3{,}5699 < r \leq 4$	Chaos – Bereich (ab r_∞)

Tabelle 5 Charakteristische Bereiche des Kontrollfaktors r

Im Chaos-Bereich treten sehr viele ungeordnete Werte auf, die Populationzahl schwankt völlig unregelmäßig. Trotzdem fällt in Bild 7 auf, dass gewisse Bereiche (“Intermittenzen“) frei bleiben, in denen also offensichtlich wieder mehr Ordnung herrscht als vorher. Dies ist noch Forschungsgegenstand. Die Bifurkationen folgen einander in immer geringerem Abstand bis r_∞.

Bei anderen Systemen gibt es von ihnen vor dem Eintritt ins Chaos noch wesentlich mehr. Definiert man r_n als den Wert, bei dem die n-te Bifurkation auftritt, so gilt für das Verhältnis



zweier aufeinander-folgender Ereignisse:

Bild 8 Reguläre und chaotische Schwankungen der Kaninchenanzahl bei verschiedenen Kontrollparametern

a) Periodenverdopplung
b) Periodenvervierfachung
c) Chaos-Bereich

$$\delta_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}$$

Im hier vorliegenden einfachen Beispiel folgt:

$$\delta_1 = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2} \approx 3$$

Treibt man diesen Prozess immer weiter, „taucht man mit steigendem n, immer feiner strukturiert, tiefer ins Chaos“, so nähert sich dieser Quotient dem Grenzwert
$\delta = 4{,}669\ 201\ 660\ 10...(n \Rightarrow \infty)$. Er wurde von S. Großmann und S. Thomas gefunden;
M. Feigenbaum hat ihn näher charakterisiert und der Quotient wird seitdem „Feigenbaum-Konstante“ genannt. Er ist eine neue Naturkonstante, welche die sprunghaften Übergänge von Systemen ins Chaos beschreibt (auch „Strukturelle Universalität“ genannt)!

Die Figuren jeweils rechts in den Bildern 8a, b und c werden in der Literatur [2] „Attraktor“ genannt, ebenso wie die Kurvenzüge im Feigenbaum-Szenario. Dieser Begriff gehört ursprünglich zum Bereich der „Phasenkurven“ analoger Schwingungen (Bilder 9 und 10).

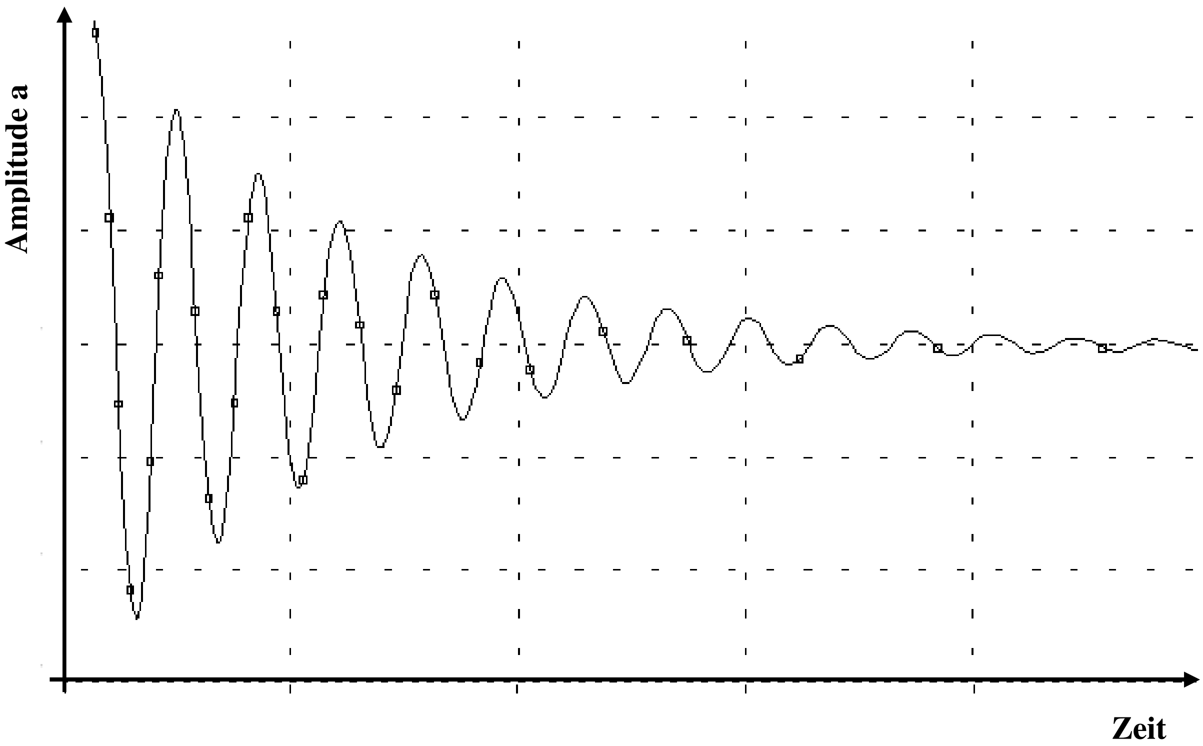


Bild 9 Beispiel für den Zeitverlauf einer abklingenden Schwingung

Das Phasenbild einer Schwingung ergibt sich, wenn man das Ausgangssignal als unabhängige Variable (x–Achse) und dessen erste Ableitung als abhängige Variable (y–Achse) aufträgt. Für die abklingende Schwingung ist dies in Bild 10 dargestellt.

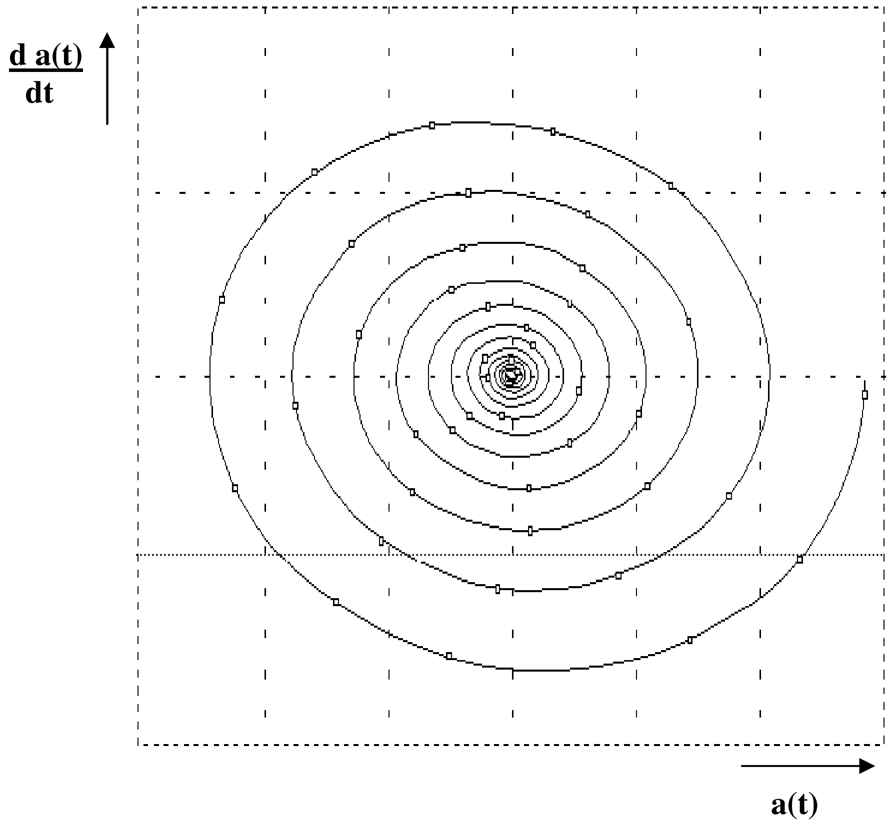


Bild 10 Phasenbahn (Trajektorie) einer gedämpften Schwingung

Die Zeit erscheint bei dieser Darstellung als Parameter. Aus der Gestalt der Phasenkurve können wichtige Rückschlüsse auf die Eigenschaften der Schwingungen gezogen werden. Bei dem Beispiel der gedämpften Schwingung verringert sich ihre Amplitude herunter bis Null (Bild 9); die zugehörige Phasenkurve ist, vom Ausschaltzeitpunkt gerechnet, eine Spirale bis zum Nullpunkt, in diesem Fall „Strudelpunkt“ genannt (Bild 10). Man hat den Verlauf des Bildpunktes bis zum Strudelpunkt recht anschaulich so aufgefasst, als ob die Phasenbahn von diesem Punkt „angezogen“ würde und nennt diesen ausgezeichneten Punkt daher „Attraktor“.

Wenn die Schwingung in ihrer Amplitude erstens nicht sinusförmig ist und zweitens im Laufe der Zeit chaotisch an- und aufklingt, dann ergibt sich eine Phasenbahn nach Bild 11. Man erkennt in diesem Fall zwei Orte, welche die Phasenkurve umschlingt, ohne sie je zu erreichen. Man sagt auch hier, sie würde von den Orten „angezogen“ und in deren Nähe rücken auch die Bahnen selbst dichter zusammen (sie „ziehen sich an“). Bei genauerer Untersuchung der Kurve kann festgestellt werden, dass die Bahn zusätzlich unregelmäßig von einem Anziehungsort zum anderen springt. In diesem Fall spricht man vom chaotischen beziehungsweise vom „Seltsamen Attraktor“.

Die Verwendung des Begriffes „Attraktor“ ist recht verwirrend. Bei analogen Systemen wird oft die Phasenbahn durch die Variable und ihre 1.Ableitung gebildet und der sich einstellende Endzustand mit „Attraktor“ bezeichnet. Bei Rekursionssystemen werden die Schritte „n“ der x-Achse und die Werte „n+1“ der y-Achse zugeordnet. Die sich dann ergebende Figur wird hier „Attraktor“ genannt. Eine Ausnahme davon wiederum ist das Feigenbaum-Szenario, welches in manchen Literaturstellen ebenfalls die Bezeichnung „Attraktor“ führt.

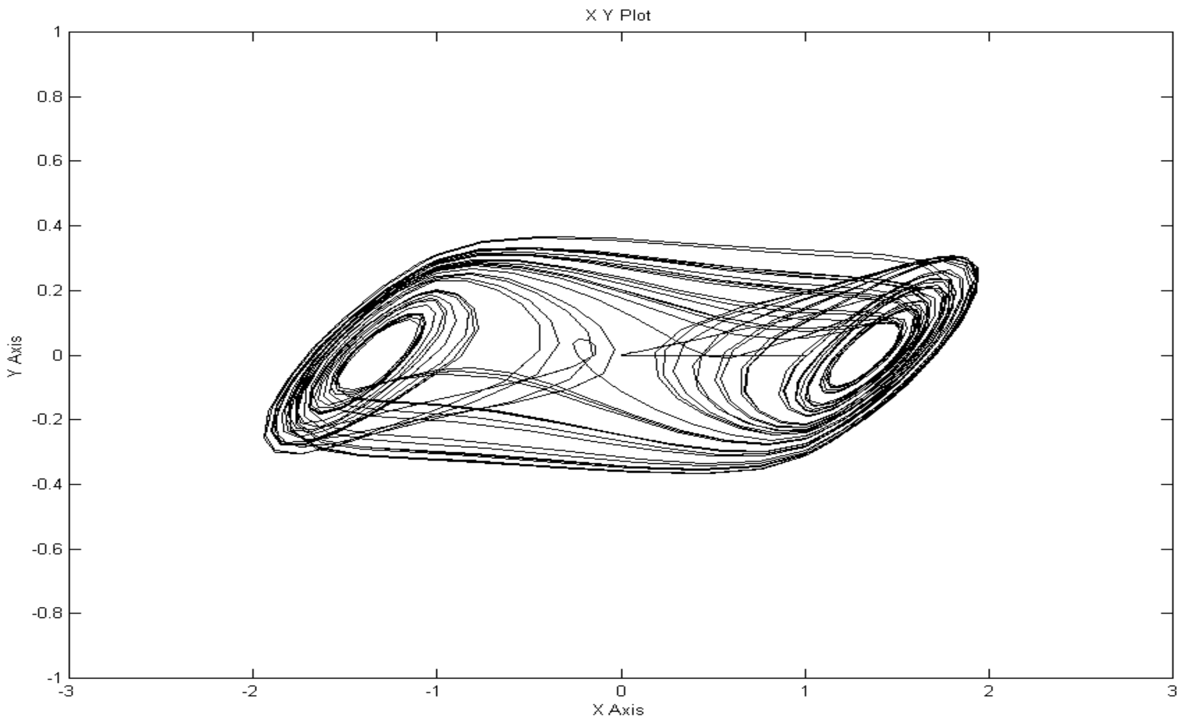


Bild 11 Beispiel für einen „Seltsamen Attraktor“

5 Chaos-Theorie in Wissenschaft und Öffentlichkeit

Nach Erläuterung der Grundlagen und der wichtigsten Begriffe der Chaos-Theorie bleibt noch die Frage, warum sie von vielen gleichrangig neben die Quantenmechanik und Relativitätstheorie gestellt wird. Die Quantenmechanik wurde für die submikroskopische Welt des „Allerkleinsten“ formuliert, die Relativitätstheorie für kosmische Systeme. Beide Bereiche entziehen sich dem unmittelbaren Zugang für die Sinne des Menschen. Gegenstand der Chaos-Theorie sind nichtlineare dynamische Systeme, die nicht nur im submikroskopischen und makroskopischen Bereich anzutreffen sind, sondern in allen Größenbereichen. Hinzu kommt die Erkenntnis neueren Datums, dass lineare Systeme nur Ausnahmen oder Näherungen realer Systeme sind.

Außerdem war man seit Jahrhunderten (nicht nur in der Physik) der Überzeugung, dass alle Vorgänge voraus berechenbar seien, sobald man sie durch mathematische Formeln erfasst hätte. Man denke nur an Planetenbahnen, Sonnen- und Mondfinsternisse und metergenaue Mondlandungen! Mit zunehmenden Fähigkeiten entdeckte und untersuchte man jedoch Systeme, die aus vielen, miteinander gekoppelten Komponenten bestehen (Rückkopplungen!). Zusätzlich war es aufgrund der rasanten Rechnerentwicklung möglich, mit nichtlinearen Gleichungssystemen in vernünftiger Zeit zu rechnen und auf die früher üblichen Näherungen durch Linearisierungen zu verzichten.

Man kann fast von einem Siegeszug des Wissens um die Tatsache sprechen, dass eigentlich alle Systeme nichtlinear sind, wenn man sie genauer untersucht.

In der Anfangszeit der Chaos-Theorie (1963) machte ein Satz des Meteorologen Edward Lorenz in breitesten Kreisen, mehr oder weniger variiert, die Runde („Schmetterlingseffekt“): „Da jede noch so kleine Störung unvorhersagbare Folgen haben kann, wäre es zumindest theoretisch denkbar, dass der Flügelschlag eines Insekts in China zwei Wochen später einen Wirbelsturm in Amerika auslöst“ [3].

Diese Aussage fördert einerseits das notwendige Bewusstsein von der Existenz weitverzweigter Verkopplungen auf der Welt (hier Atmosphäre), andererseits wurde und wird sie mit äußerst plakativer Wirkung in „schwarz-weiß – Manier“ öffentlichkeitswirksam von den Medien vermarktet. Darauf wird gleich noch genauer eingegangen. Zuvor noch ein weiteres Zitat, das den „Schock“ [1, S. 3] zeigt und die Verwirrung, die ursprünglich herrschte: „Der kleinste Rundungsfehler in irgendeiner Stelle hinter dem Komma...genügt bei einem chaotischen System, um zu einem völlig falschen Resultat zu kommen“. Und einige Zeilen später: „Chaos ist die Regel. Selbst bei einfachen mechanischen Systemen, wie beispielsweise dem Planetensystem, wäre geordnetes Verhalten eine höchst unwahrscheinliche Ausnahme. Beliebig kleine Änderungen reichen nämlich aus, um ein geordnetes System chaotisch zu machen“ [4].

Der letzte Satz ist zwar auch recht publikumswirksam und wird so manchem seine eigenen Lebenserfahrungen bestätigen („Chaos ist die Regel“...), aber er ist trotzdem völlig falsch. Denn er verwischt den Unterschied zwischen der variablen Größe (in diesem Beispiel Kaninchen) mit dem Kontrollparameter (Futtermenge). Das soll sofort gezeigt werden (Tabelle 6):

	$r = 2$
n	x_n
0	$\mathbf{x_0 = 0{,}3}$
1	$x_1 = 2\,(0{,}3 - 0{,}3^2) = 0{,}42$
2	$x_2 = 2\,(0{,}42 - 0{,}42^2) = 0{,}4872$
3	$x_3 = 2\,(0{,}4872 - 0{,}4872^2) = 0{,}499672$
4	$x_4 = 2\,(0{,}499672 - 0{,}499672^2) = 0{,}4999997$
5	$x_5 = 2\,(0{,}4999997 - 0{,}4999997^2) = 0{,}5$

Tabelle 6 Start mit 300 Tieren (0,3) und Versorgung mit normaler Futtermenge

Es wurde wieder der Fall des „normalen“ Kontrollparameters r = 2 ausgewählt. Dafür kam aber ein stark geänderter (!) Anfangswert zur Anwendung: x_0 beträgt statt 0,2 jetzt **0,3**. Wie man sieht, streben die Werte ebenfalls dem Endwert 0,5 zu (wie in Tabelle 1). Beobachtet man das Wachstum der Kaninchen-Zahl mit anfangs 200 Tieren oder mit anfangs 300, so wird in diesem System mit normaler Nahrungszufuhr stets die Zahl von 500 erreicht. Also trotz Änderung der Anfangszahl kein Auftreten von Chaos!

r = 4

n	x_n
0	$\mathbf{x_0}$**=** 0,200**1**
1	$x_1 = 4\ (0{,}2001 - 0{,}2001^2) = 0{,}640\mathbf{2}$
2	$x_2 = 4\ (0{,}6402 - 0{,}6402^2) = 0{,}921\mathbf{4}$
3	$x_3 = 4\ (0{,}9214 - 0{,}9214^2) = 0{,}289\mathbf{7}$
4	$x_4 = 4\ (0{,}2897 - 0{,}2897^2) = 0{,}82\mathbf{31}$
5	$x_5 = 4\ (0{,}8231 - 0{,}8231^2) = 0{,}58\mathbf{24}$

Tabelle 7 Startwert 0,2001 und Kontrollfaktor 4 (übermäßige Futtermenge)

Erst, wenn der Kontrollparameter (!) in den „roten Bereich“ kommt, also einen Wert erhält, der das System chaotisch werden lässt, dann kommen „beliebig kleine Änderungen“ zur Wirkung. In dem Fall genügen bei den Anfangsbedingungen schon geringste Unterschiede in irgendwelchen Nachkommastellen, um zu einem völlig anderem Resultat zu kommen. Dieser Fall wurde mit Tabelle 4 schon vorgestellt. Hier sei der Chaos verursachende Kontrollparameter r = 4 wieder übernommen und eine geringe Änderung der Anfangsbedingung in der vierten Stelle hinter dem Komma vorgenommen (Tabelle 7). Man erkennt zweierlei: Jetzt schwanken die Werte chaotisch und zweitens wirkt sich die Änderung des Anfangswertes in der vierten Stelle (oben mit „Rundungsfehler“ gemeint) durch das rekursive Einsetzen des jeweiligen Ergebnisses auch bald in weiter vorn liegenden Stellen aus.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind hier nur soviel Schritte aufgeführt, die nötig sind, das Wesentliche zu zeigen; außerdem wurde konsequent nur vierstellig gerechnet, d.h. nach jeder Zeile wurde das Ergebnis im Taschenrechner gelöscht und auch nur vierstellig wieder eingegeben, so dass der Rechner nicht mit seiner inneren hohen Stellenzahl weiter rechnete. (Bei diesem abstrakten Rechenbeispiel ist die Zuordnung von Tieren nicht mehr sinnvoll; 0,2001 entspräche 200,1 Tieren...)

Es sei also noch einmal betont:

Nur im Chaosfall, also wenn der Kontrollparameter (!) entsprechende Werte hat, wirken sich Änderungen der Anfangsbedingungen sehr stark aus bis hin zu völlig unterschiedlichen Ergebnissen.

Und jetzt kann man noch einmal auf das klassische Zitat zum „Schmetterlingseffekt“ und seinen Hintergrund zurückkommen. In [3, S. 58] wird schön beschrieben, wie E. Lorenz zu seiner berühmten Aussage gekommen ist: „Er hatte damals versucht, ein bestimmtes Wettermodell mit einem – aus heutiger Sicht primitiven – Computer zu simulieren. Eines Tages wollte er die Rechenprozedur abkürzen und gab die Zwischenergebnisse eines früheren Ausdrucks erneut ein. Zwar stimmten die ersten Werte, die der Computer danach auswarf, wie erwartet, mit den alten Ergebnissen überein. Aber wenig später konnte Lorenz keine Ähnlichkeit mit den früheren Ergebnissen mehr finden“. Vom Verfasser dieses Aufsatzes wurde oben „-modell“ unterstrichen. In dem damaligen mathematischen Modell wurden offensichtlich rekursive Rechenvorgänge durchgeführt, wie sie bei Digitalrechnern sinnvoll und heute üblich sind und in den Formeln vorhandene Kontrollparameter hatten Werte zugewiesen bekommen, die zu chaotischen Ergebnissen der Berechnungen führten. Mit anderen Worten, die Formeln waren so aufgebaut, dass sie ein System mit positiver Rückkopplung (Mitkopplung) beschrieben, welches kleine Änderungen immer sehr verstärkt. Dies galt zwar für das mathematische Modell der Atmosphäre aber nicht unbedingt für die Realität! Das Modell war eben noch nicht gut genug.

Auf Grund eines völlig anderen Rechenmodells als jenes von Lorenz wurde inzwischen mit Hilfe der statistischen Mechanik nachgewiesen, dass der so genannte „Schmetterlingseffekt" lediglich auf Grund von weitgehenden Näherungen gefolgert wurde und für unsere Atmosphäre nicht zutrifft [5].

„Schmetterlingseffekt" ist eine Über-Interpretation!

Aus dem vorsichtigen: Wirbelsturm „theoretisch denkbar" des Wissenschaftlers (s.o.) wurde in vielen Medien „kann" oder sogar „wird" und so bildete sich eine Schieflage des allgemeinen Wissens um diese Dinge. Nach heutigem Wissen ist unsere Atmosphäre glücklicherweise (noch?) nicht in einem solchen Zustand, dass geringste Änderungen an einem Ort zu lawinenartig anschwellenden Wirkungen anderen Ortes führen. Ihre in dieser Hinsicht wichtigen Größen („Kontrollparameter") haben keine Werte, die zu chaotischem Verhalten des Systems führen. Wenn man an die zunehmenden Wetter - Kapriolen denkt, könnte man allerdings ins Grübeln kommen; vielleicht ist der (steigende) CO_2-Gehalt ein solcher Kontrollparameter?...

In vereinfachenden Populärdarstellungen, die viel weiter verbreitet sind als fachlich korrekte, ist oft pauschal von „chaotischen Systemen" die Rede und wird der Eindruck geweckt, dass der „chaotische Charakter" altbekannter und neuer Systeme nun aufgedeckt wurde und damit das Ende jeglicher langfristiger Vorhersage eingetreten sei; den Vogel in dieser Hinsicht schießt folgende Kapitelüberschrift ab: „Chaos regiert die Welt" [6].

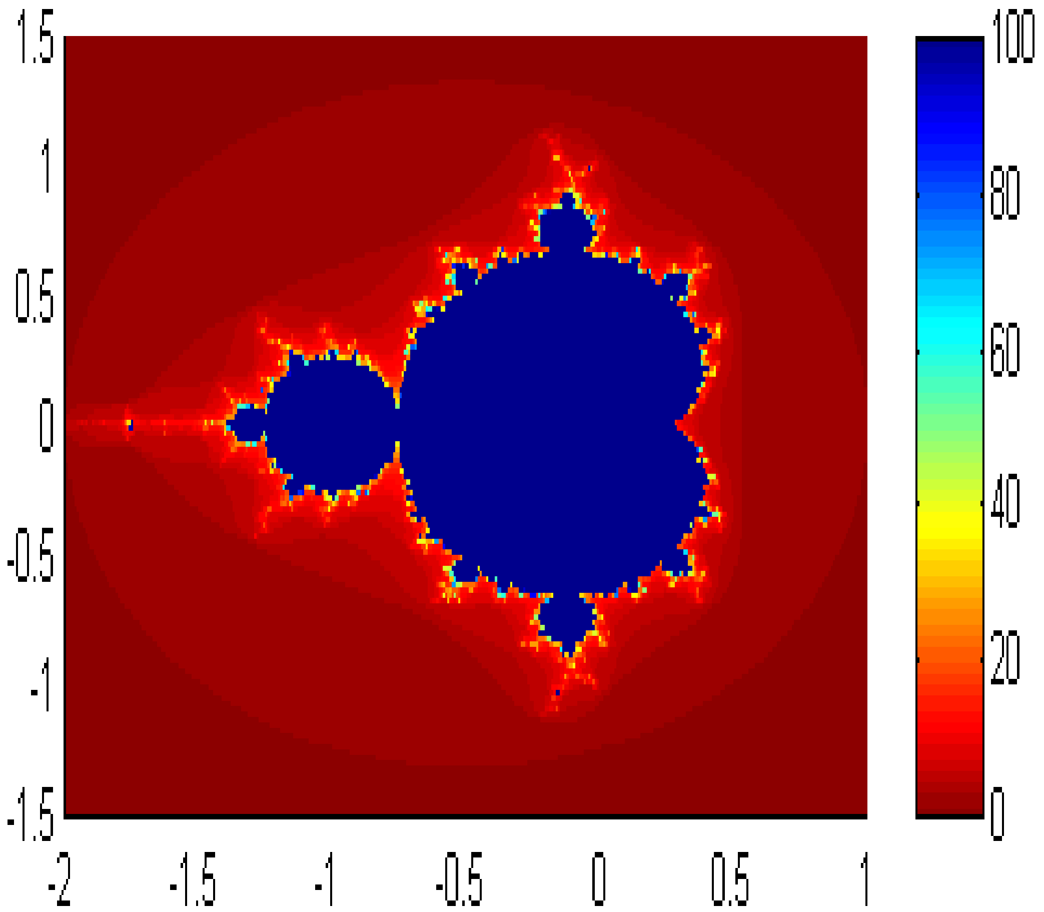
Hier scheint die Sensitivität des Journalisten für den hohen Rang der neuen Erkenntnisse ihn zu einer Sensations-Schlagzeile verführt zu haben; denn die ‚Worthülse Chaos' steht hier eigentlich für Nichtlinearität praktisch aller Systeme und selbstverstärkende Rückkopplung (Mitkopplung), die bei passenden „Kontrollparametern" auftreten kann. Das wirklich Bahnbrechende ist wohl die sich ausbreitende Kenntnis über Systemvernetzungen aller Art, die wegen der nichtlinearen Zusammenhänge leider nicht mehr mit „gesundem Menschenverstand" zu durchschauen sind. Möglicherweise ist den Medien Dank ihrer plakativen Art das allmählich wachsende Bewusstsein von der Existenz unzähliger Rückkoppelschleifen in allen Systemen zu verdanken, wobei das schillernde Wort „Chaos" als Transportvehikel funktioniert hat.

Dann gibt es noch das Wort „Unvorhersehbarkeit" mit seinem „philosophischen Unterton". Gemeint sind damit die im realen Leben immer vorhandenen Störungen oder Ungenauigkeiten von (Mess-)Werten. In Systemen mit Rückkoppelschleifen, die so geartet sind, dass sie (selbst)verstärkend wirken, wirkt sich beim Rechnen (!) die Anfangsungenauigkeit mit jedem Durchlaufen der Schleife immer stärker auf das Ergebnis aus, so dass bei Rechnungen mit verschiedenen Anfangswerten die Ergebnisse schließlich weit auseinander liegen. Dies gilt aber nur für den Sonderfall, dass das betrachtete System den zugehörigen Kontrollparameter hat. Wie schon beim Beispiel „Wetter" oben angedeutet, sind die den Menschen umgebenden Systeme nicht automatisch chaotisch, auch wenn sie nichtlinear sind, aber es ist durchaus möglich, dass sie durch Verschiebungen bestimmter Systemgrößen, die dem Kontrollparameter entsprechen, chaotisch werden!

Mitkopplung und Nichtlinearität führen <u>nicht automatisch</u> ins Deterministische Chaos.

Oben wurde die Ohnmacht des „gesunden Menschenverstandes“ erwähnt, was vielen nicht gefallen wird – schon gar nicht Politikern. Auf derartige Empfindungen kann der verantwortungsbewusste Fachmann aber keine Rücksicht nehmen; denn: „Diese Gesetzmäßigkeiten der Unvorhersehbarkeit gelten in noch viel größerem Maße für komplexe Systeme wie die Wirtschaft oder politische Systeme. Wir müssen uns mit dem Gedanken abfinden, dass wir in derartigen Systemen...die Entwicklung nicht auf längere Zeit vorhersagen können. Dies hat eine noch längst nicht allgemein erkannte weitreichende Konsequenz: Die Nationen müssen eine große Anzahl von Experten in Wissenschaft, Wirtschaft und Politik ständig bereithalten, damit diese in konzertierten Aktionen auf jeweils neu eintretende Situationen sachgemäß reagieren können. Dies erfordert enorme Sachkenntnis und Fingerspitzengefühl, da zu starkes Eingreifen zu Überreaktionen führt und das System buchstäblich von einem chaotischen in den nächsten chaotischen Zustand gestoßen wird“ [6].

6 Deterministisches Chaos und Fraktale – ungleiche Brüder



<u>Bild 12</u> Mandelbrot-Menge („Apfelmännchen“)

Der Begriff „Fraktal" taucht in der Literatur oft zusammen mit „Chaos" auf und es ist daher auch hier angebracht, ihn kurz zu streifen und zu zeigen, in welcher Beziehung das Fraktal zum Chaos steht. Hauptunterscheidungsmerkmal ist, dass es sich um räumliche Strukturen handelt, während es beim deterministischen (!) Chaos - und nur um dieses Chaos geht es in diesem Aufsatz - um zeitliche Abläufe geht. Die Wortbildung „Fraktal" geht auf das lateinische Adjektiv „fractus" zurück und bedeutet „gebrochen"; man denke an Fragment oder ein Wort aus der Medizin: Fraktur. Man kann auch „zerklüftet" damit verbinden, da dieses Wort gut den räumlichen Charakter des Fraktals unterstreicht.

„Der Begriff ‚Fraktal' wurde von B. Mandelbrot [7] eingeführt, wobei sein „Apfelmännchen" das bekannteste (theoretische) Fraktal wurde (Bild 12). Mandelbrot stellt der Euklidischen Geometrie, die vorwiegend glatte Strukturen wie Geraden, Kreise, Rechtecke, Kuben, Ellipsoide etc. behandelt, eine fraktale Geometrie gegenüber, die die geometrischen Eigenschaften von Strukturen analysiert, wie wir sie besonders häufig in der Natur vorfinden: Küstenlinien, Wolkenformationen, Baumsilhouetten, Farbgrenzen im Vogelgefieder und so fort. Fraktale zeichnen sich dadurch aus, dass sie unabhängig von der betrachteten Längenskala immer wieder einander ähnliche Strukuren enthalten; sie sind selbstähnlich: Ein Ausschnitt aus einer Küstenlinie, aus kleinerem Abstand betrachtet, sieht ähnlich aus wie die ganze Küstenlinie, betrachtet aus größerem Abstand" [8].

Fraktale haben selbstähnliche Strukturen („Skalen-Invarianz")

Ein sehr altes Beispiel aus Zeiten, in denen man von Fraktalen sicher noch nichts ahnte, ist die russische Puppe („Matroschka"). Öffnet man sie, findet man im Inneren eine etwas kleinere, identische Ausführung („selbstähnlich"), die sich wieder öffnen lässt usw. (theoretisch bis ins Unendliche). Für Selbstähnlichkeit gibt es noch den Begriff: „Skalen-Invarianz".

Die „Zerklüftung" fraktaler Strukturen hat (mindestens) einen großen Vorteil bei Austauschprofilen in Natur und Technik: Es ist die Methode, bei einem gegebenen Volumen eines Körpers ihm eine möglichst große Oberfläche zu verleihen. Man denke nur an Lunge, Leber und die Niere oder an Heizkörper- und Kühlrippen. Bei der Lunge geht es um möglichst guten Gas-Austausch, bei Leber und Niere um Stoffaustausch und bei den Beispielen aus der Technik um Wärme-Austausch.

Das Gemeinsame an chaotischen Zeitverläufen und fraktalen Raumstrukturen ist die Tatsache, dass sie auf rekursiven Bildungsvorschriften beruhen, die oben für das deterministische Chaos ausführlich beschrieben wurden.

Die rekursive Bildungsvorschrift ist deterministischem Chaos und Fraktal gemeinsam

Zum Ausklang sollen aber doch höchst dynamische Systeme genannt werden, die wirklich zeitlich variable Vorgänge und räumlich „zerklüftete" Strukturen gemeinsam und gleichzeitig enthalten: Gemeint ist die „Turbulenz", mit der sich schon das Universalgenie Leonardo da Vinci intensiv beschäftigt hat. Er erstellte viele sorgfältige Studien über turbulente Bewegungen. „In seinen Beobachtungen und Zeichnungen schnell fließenden Wassers bemerkte Leonardo, dass Wirbel dazu neigen, in immer kleinere Wirbel zu zerfallen, die dann wiederum fragmentieren. Im Verlauf der Entstehung von Turbulenz kommt es anscheinend zu unendlich vielen Teilungen und immer weiteren Unterteilungen oder Verzweigungen auf immer kleinerer Skala. Wo werden diese Verzweigungen enden? Gibt es für ihre Anzahl eine Grenze? Eine Flüssigkeit besteht ja schließlich aus Molekülen; ist es denkbar, dass wahre Turbulenz bis ganz hinunter auf das molekulare Niveau anhält – oder gar darüber hinaus?

Die Idee des Wirbels im Wirbel im Wirbel – und so fort bis ins unendlich Kleine – legt es nahe, sich vorzustellen, dass Systeme am Rande der Turbulenz sich auf immer kleineren Skalen selbst ähnlich bleiben" [9, S. 68].

H. G. Schuster schreibt dazu kurz und knapp: „Voll entwickelte Turbulenz, etwa in einer Flüssigkeit, bedeutet irreguläres Verhalten sowohl in der Zeit als auch im Raum. Es ist das Ziel der Chaosforschung, auch voll entwickelte raum-zeitliche Turbulenz zu beschreiben, aber dieses Ziel ist bis jetzt noch lange nicht erreicht“ [2, S. 5].

Anhang

7 Nichtlineare Kennlinien und Halbleiterschaltungen

7.1 Allgemeines

Die (notwendige) Bedingung für chaotische Systeme ist die „Rückkopplung", speziell die „Mitkopplung". In Bild 1 ist dies durch eine externe Schaltung, einen äußeren, signalrückführenden Block dargestellt. Es gibt aber auch aktive Halbleiter-Bauelemente, die wegen ihrer Halbleiterstrukturen schon eine „innere Rückkopplung" haben. Dazu gehören die Tunneldioden (TD) und Unijunction-Transistoren (UJT) (Bild 13).

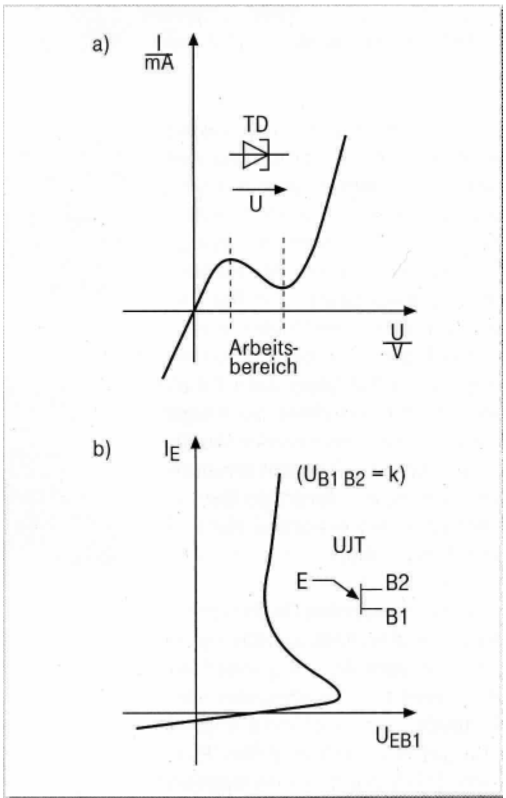


Bild 13: Kennlinien von
a) Tunneldiode und
b) Unijunction -Transistor

Auf Grund der inneren Rückkopplung dieser Bauelemente hat die I = f(U)-Kennlinie einen fallenden Teil, der einem negativen Widerstand entspricht [10]. Das bedeutet, dass mit ihm ein gleich großer, äußerer Verlustwiderstand, z. B. der eines Schwingkreises kompensiert werden kann. So können mit diesen Zweipolen sehr einfache Oszillatorschaltungen aufgebaut werden. Eine solche Schaltung mit einer Tunneldiode zeigt Bild 14 [10].

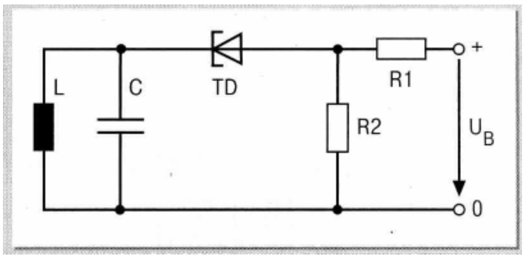


Bild 14:
Oszillator mit Tunneldiode

Es muss allerdings erwähnt werden, dass mit Hilfe dieser Zweipole für die verschiedenen Anwendungsfälle keine chaotischen, sondern reguläre Schwingungen erzeugt worden sind. Zur Erzeugung von chaotischen Schwingungen muss die Kennlinie nicht nur eine negative Steigung (s. Bild 13) haben, sondern auch deutlich nichtlineare Kennzeichen im Arbeitsbereich aufweisen wie in Bild 15.

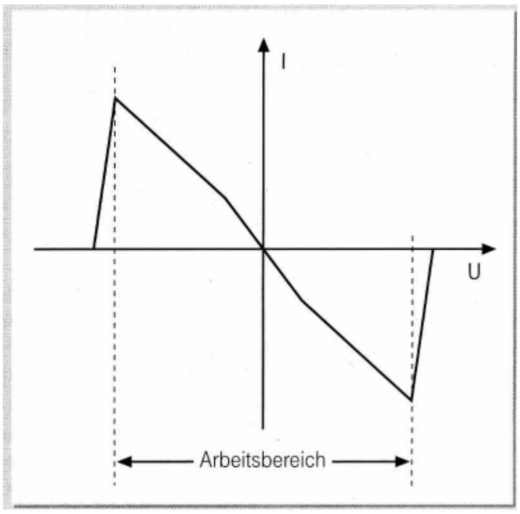


Bild 15:
Nichtlinearer Eingangswiderstand
der kombinierten Operationsverstärker

Die aktiven Halbleiter-Bauelemente haben allerdings zwei gravierende Nachteile: Ihre Kennlinie ist fest vorgegeben und sie sind sehr temperaturempfindlich. Dieser Nachteil kann

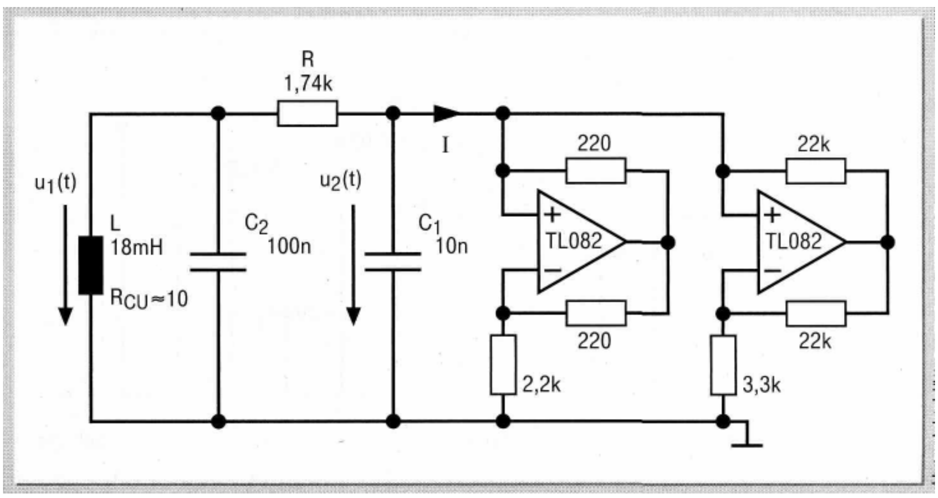


Bild 16:
Schaltbild Chua-Oszillator mit zwei Operationsverstärkern

vermieden werden, indem ein Zweipol mit nichtlinearer Kennlinie und negativem Teilstück mit Operationsverstärkern nachbildet wird (Bild 16). Die Operationsverstärker sind zwar auch aus temperaturempfindlichen Halbleitern aufgebaut, aber ein Blick auf die Schaltung zeigt die Verbindungen mit Widerständen von den Ausgängen zum jeweiligen „Minus-Eingang", was auf die vorhandene Gegenkopplung und damit erhöhte Stabilität hinweist. Bei dieser Schaltung handelt es sich um eine erprobte praktische Version [11] der so genannten „Chua-Schaltung", die als Computer-Simulation zuerst veröffentlicht [12], im Laufe der Zeit in zahlreichen Aufsätzen verschiedener Autoren aus mathematischer Sichtweise heraus untersucht wurde. Sie kann daher als ein schaltungstechnischer Klassiker betrachtet werden.

Die Schaltung enthält drei lineare Energiespeicher (eine Induktivität und zwei Kapazitäten), einen linearen (ohmschen) Widerstand und einen nichtlinearen, negativen Widerstand (s. Bild 15), welcher durch die zwei Operationsverstärker realisiert ist.

In [11] ist eine Entwurfsmethode zu dieser Schaltung ausführlich beschrieben. Zusätzlich werden dort experimentelle Ergebnisse und PSPICE-Simulationen einer betriebsfähigen Schaltung mit handelsüblichen Komponenten gezeigt.

Die vier konventionellen Bauelemente der Chua-Schaltung (auch Chua-Oszillator genannt) brauchen nicht weiter besprochen zu werden, sie sind bekannt. Die Nachbildung des erforderlichen nichtlinearen, negativen Widerstandes durch zwei Operationsverstärker hat eine resultierende Kennlinie nach Bild 15. Man erkennt am knickförmigen Verlauf die Nichtlinearität mit zwei verschiedenen negativen Steigungen. Die beiden steilen Äste links und rechts entstehen durch die Aussteuergrenzen der Verstärker.

Die Beschaltung der Verstärker zeigt ebenfalls je eine Mitkopplung (Verbindungen von den Ausgängen zum jeweiligen „Plus-Eingang"), wodurch die fallenden Kennlinienäste erst entstehen können. Durch die Wahl der Widerstände an den Verstärkern kann die Kennlinie nach eigenen Erfordernissen gestaltet werden, wodurch der oben erwähnte Nachteil von Tunneldioden entfällt. Außerdem sind hier erheblich größere Signalamplituden möglich.

7.2 Simulation

Die Schaltung wurde an der Fachhochschule der Deutschen Telekom in Leipzig im Rahmen eines Projekts mit zwei TL 082 aufgebaut und auch mit PSPICE simuliert [13]. Die Ergebnisse

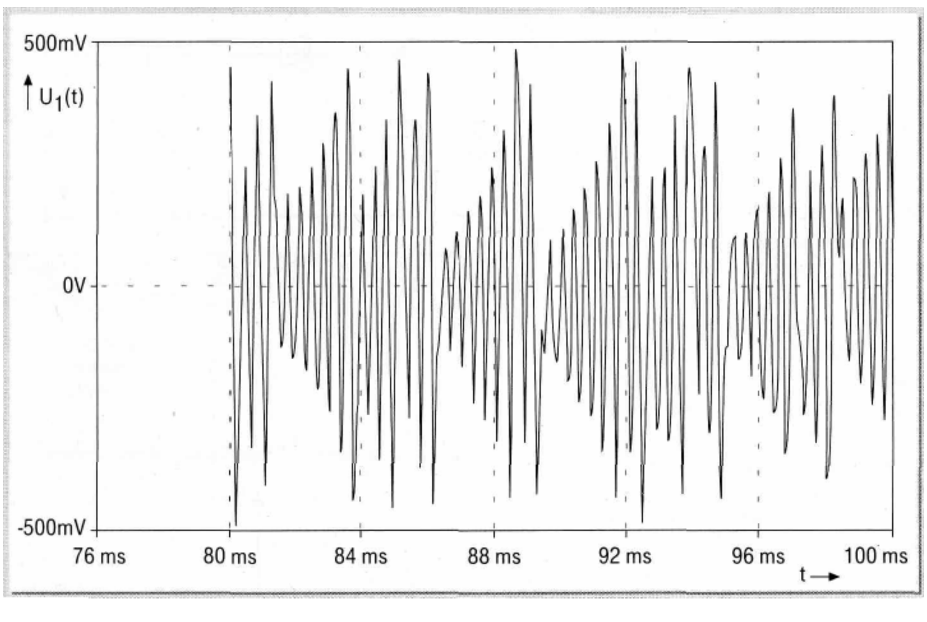


Bild 17:
Ausgangssignal des Chua-Oszillators

der realen physikalischen Schaltung und die der Rechnersimulation stimmten hervorragend überein. Der Wert des Widerstandes R bestimmt, ob die Schwingungen chaotisch werden oder nicht. Die Signalspannung $u_1(t)$ am Schwingkreis für den Chaos-Fall (R = 1 740 Ohm) ist in Bild 17 dargestellt. Hier ist das völlig unregelmäßige „Stottern" des Oszillators zu erkennen, welches oben schon erwähnt wurde.

7.3 Verschlüsselung mit „chaotischen Oszillatoren"

Darüber hinaus gibt es seit langem Ansätze, Nachrichten chaotisch verschlüsselt zu übertragen, um sie gegen unbefugtes Abhören zu sichern [17]. Hierzu werden zwei chaotische Oszillatoren aus völlig identischen Bauelementen aufgebaut, von denen der eine zur Modulation auf der Senderseite, der andere zur Demodulation auf der Empfängerseite benutzt wird. Wer die Nachricht abhören will, müsste einen Oszillator der gleichen Bauart mit exakt identischen Werten besitzen, anderenfalls kann er das chaotische Signal nicht entschlüsseln.

Die Bilder 4-6, 8-10 und 13-17 wurden verändert übernommen aus der Vorläufer-Veröffentlichung: Norbert Harthun; Ines Rennert: Deterministisches Chaos und Rückkopplung – zwei Seiten einer Medaille; Unterrichtsblätter d. Deutschen Telekom AG; Jg. 55; 11/2002, S. 558-569

8 Literaturquellen

[1] H. G. Schuster: Deterministisches Chaos. Eine Einführung; Weinheim 1994; VCH Verlagsgesellschaft; ISBN 3-527-29089-3

[2] W. Seifritz: Wachstum, Rückkopplung und Chaos; München, Wien 1989; Hanser Verlag

[3] R. Breuer; G. Haaf: Ein ordentliches Chaos in: Chaos und Kreativität; Geo-Wissen 1990, Nr. 2 S. 32-60

[4] Uli Deker, Harry Thomas: Unberechenbares Spiel der Natur – Die Chaos-Theorie; Bild der Wissenschaft 1983 Nr. 1

[5] R. Robert: Das Ende des Schmetterlingseffekts; Spektrum der Wissenschaft, November 2001, S. 66-74

[6] Prof. Dr. Hermann Haken, Direktor des Instituts für Theoretische Physik und Synergetik der Universität Stuttgart, zitiert in Geo-Wissen; Nr. 2; 1990; Gruner + Jahr; Hamburg

[7] B. Mandelbrot: The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman; San Francisco 1982

[8] W. Martienssen: Gesetz und Zufall in der Natur (S. 91)

[9] J. Briggs; F.D. Peat: Die Entdeckung des Chaos; dtv München 1993

[10] H. Lindner; H. Brauer; C. Lehmann: Taschenbuch der Elektronik; Leipzig; Köln 1993; Fachbuchverlag; ISBN 3-343-00847-8

[11] M. P. Kennedy: Robust OP Amp Realization of Chua's Circuit; Frequenz 46 (1992); 3-4; S. 66-80

[12] T. Matsumoto: A chaotic attractor from Chua's circuit; Trans. Circuits. Syst.,CAS-31 (1984) 12, pp. 1055-1058.

[13] J. Voß; K.Möckel: Realisierung der Chua-Schaltung; Projektarbeit; 1996; Fachhochschule Leipzig der Deutschen Telekom AG

[14] M. Itoh; H. Murakami; L.O. Chua: Communications Systems via Chaotic Modulations; IEICE Trans. Fundamentals. Vol. E77-A.NO. 6. June 1994; p. 1000